Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009
Wykład 1. Rodziny zbiorów

01/10/09

OPERACJE NA ZBIORACH

Rozważamy pewien zbiór X (zwany *przestrzenią*). Wszystkie pozostałe zbiory (oznaczane literami A, B, C, A_n itp.) są z założenia podzbiorami tej przestrzeni.

Potrzebne nam będą operacje na zbiorach: suma $A \cup B$, przekrój $A \cap B$, różnica $A \setminus B$, różnica symetryczna $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, i dopełnienie $A^c = X \setminus A$. Zauważmy, że każdą z tych operacji można zastąpić złożeniem innych, na przykład

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \quad A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \quad \text{(wzory de Morgana)},$$

$$A \setminus B = A \cap B^c,$$

itp. Wszystkie operacje można wyrazić przy pomocy sumy i dopełnienia.

Dalej, potrzebne nam będą operacje na rodzinach zbiorów: Jeśli $\mathcal{A} = \{A_\iota : \iota \in J\}$ jest rodziną zbiorów indeksowaną parametrem ι przebiegającym zbiór J, to można stworzyć sumę i przekrój tej rodziny:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\iota \in J} A_\iota, \qquad \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{\iota \in J} A_\iota.$$

W przypadku gdy rodzina $\mathcal{A}$ jest przeliczalna i ponumerowana liczbami naturalnymi mówimy o ciągu zbiorów A_n ($n \in \mathbb{N}$). Oprócz sumy i przekroju takiego ciągu można utworzyć ich granicę górną i dolną:

$$\overline{\lim}_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m, \qquad \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} A_m.$$

Jak widać (po rozpisaniu znaków sumy i przekroju przy pomocy kwantyfikatorów), do granicy górnej należą wszystkie te elementy, które należą do nieskończenie wielu zbiorów A_n, a do granicy dolnej – te, które należą do wszystkich oprócz skończenie wielu zbiorów A_n. Jeśli granica dolna jest równa granicy górnej, to mowimy, że ciąg A_n ma granicę. Na przykład każdy zstępujący lub wstępujący ciąg zbiorów ma granicę (dla wstępującego jest to suma, dla zstępującego – przekrój).

WYBRANE TYPY RODZIN ZBIORÓW

PIERŚCIEŃ to niepusta rodzina zbiorów zamknięta na sumy i różnice. Przykład: Rodzina zbiorów skończonych (*co należy czytać: rodzina wszystkich skończonych podzbiorów przestrzeni X*). Przyjmujemy, że zbiór pusty jest skończony.

FAKT 1: Każdy pierścień zawiera zbiór pusty.

FAKT 2: Pierścień jest zamknięty na przekroje.
Dowód: $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

FAKT 3: Przekrój dowolnej familii pierścieni jest pierścieniem.

(Uwaga: Piszę "familii", bo słowa "rodzina" używam w znaczeniu "zbiór zbiorów", tu natomiast mamy "zbiór rodzin", czyli "zbiór zbiorów zbiorów".)

CIAŁO to niepusta rodzina zbiorów zamknięta na sumy i dopełnienia. Przykład: Rodzina zbiorów skończonych i ich dopełnienia.

FAKT 4: a) Każde ciało jest pierścieniem.

b) Pierścień jest ciałem wtedy i tylko wtedy gdy zawiera X.

FAKT 5: Przekrój dowolnej familii ciał jest ciałem.

TWIERDZENIE 1: Dla każdej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ istnieje *najmniejszy* pierścień i *najmniejsze* ciało zawierające $\mathcal{A}$. Tzn. po pierwsze istnieje przynajmniej jeden pierścień zawierający $\mathcal{A}$, po drugie, jeden z nich (oznaczmy go przez $P(\mathcal{A})$) ma tę własność, że każdy inny pieścień zawierający $\mathcal{A}$ zawiera $P(\mathcal{A})$. Analogicznie tłumaczymy zdanie o istnieniu najmniejszego ciała.

Obiekty powyższe nazywamy pierścieniem (ciałem) *generowanym* przez $\mathcal{A}$.

Przykład: Pierścień generowany przez rodzinę wszystkich zbiorów jednoelementowych, to pierścień składający się ze wszystkich zbiorów skończonych. Ciało generowane przez tę rodzinę, to to ciało składające się ze wszystkich zbiorów skończonych i ich dopełnień.

SIGMA-PIERŚCIEŃ to niepusta rodzina zbiorów zamknięta na *przeliczalne* sumy i na różnice.

SIGMA-CIAŁO to niepusta rodzina zbiorów zamknięta na *przeliczalne* sumy i na dopełnienia.

Każdy sigma-pierścień jest zamknięty na przeliczlne przekroje, zatem też na granice górne i dolne. Każde sigma-ciało jest sigma-pierścieniem. Przekrój dowolnej familii sigma-pierścieni (sigma-ciał) jest sigma-pierścieniem (sigma-ciałem). Dla każdej niepustej rodziny $\mathcal{A}$ istnieje najmniejszy sigma-pierścień i najmniejsze sigma-ciało zawierające $\mathcal{A}$ (czyli generowane oprzez $\mathcal{A}$). Sigma-ciało generowane przez $\mathcal{A}$ będziemy oznaczać przez $\sigma(\mathcal{A})$.
Przykład: sigma-pierścień generowany przez rodzinę zbiorów jednopunktowych, to sigma-pierścień składający się ze wszytskich zbiorów przeliczalnych (w tym skończonych i pustego). Sigma-ciało generowane przez tę rodzinę, to sigma-ciało składające się ze wszytskich zbiorów przeliczalnych (w rozumieniu jak wyżej) i ich dopełnień.

RODZINA MONOTONICZNA to niepusta rodzina zbiorów zamknięta na *przeliczalne wstępujące* sumy i na *przeliczalne zstępujące* przekroje.

Przekrój dowolnej familii rodzin monotonicznych jest rodziną monotoniczną. Dla każdej niepustej rodziny $\mathcal{A}$ istnieje najmniejsza rodzina monotoniczna zawierająca $\mathcal{A}$ (czyli generowana przez $\mathcal{A}$). Każdy sigma-pierścień jest rodziną monotoniczną.
Przykład: Na prostej $X = \mathbb{R}$ rodzina wszystkich półprostych (a, ∞) gdzie $a > 0$ plus zbiór pusty jest rodziną monotoniczną, ale nie jest sigma-pierścieniem (różnice są odcinkami).

TWIERDZENIE 2: Rodzina zbiorów jest sigma-pierścieniem (sigma-ciałem) wtedy i tylko wtedy gdy jest jednocześnie pierścieniem (ciałem) i rodziną monotoniczną.

TWIERDZENIE 3: Jeśli rodzina monotoniczna zwiera ciało, to zawiera sigma-ciało generowane przez to ciało.

Uwaga: Dwoód wymaga indukcji pozaskończonej